On utilise souvent une définition alternative de ces intégrales généralisées dite au sens de la *partie principale* (ou valeur principale) de Cauchy

$$\begin{aligned}
\mathrm{PP}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx &= \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)dx \\
\mathrm{PP}\int_{a}^{b} f(x)dx &= \lim_{\epsilon\to 0}\left\{\int_{a}^{c-\epsilon} f(x)dx + \int_{c+\epsilon}^{b} f(x)dx\right\} \text{ si } f \text{ non bornée en } x = c \in\,]a,b[
\end{aligned}$$

Si l'intégrale converge au sens standard elle converge aussi en partie principale et les deux définitions donnent la même valeur de l'intégrale. Une intégrale peut converger en PP sans converger au sens standard.

b) Séries

Séries numériques

On appelle somme partielle de rang N d'une série numérique de terme général u_n la somme :

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n$$

La série converge et a pour somme S si la suite S_N a une limite bornée : $S = \lim\limits_{N\to\infty} S_N$ et on note :

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$$

Une *condition nécessaire* de convergence est que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$; la convergence de la série de terme général $|u_n|$ entraîne celle de la série de terme général u_n qui est alors qualifiée d'*absolument convergente.*

Exemples

1. soit $\zeta(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ (fonction ζ de Riemann) ; cette fonction est définie (*ie* la série converge) pour $x > 1$;
2. la *série géométrique* de *raison* q : $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$ est convergente pour $|q| < 1$ et a pour somme $\frac{1}{1-q}$.

- Critères de convergence pour une série à termes positifs ($u_n \geqslant 0$) :
  - critère de d'Alembert : soit $L = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$. Si $L < 1$ la série converge ; si $L > 1$ la série diverge ;

- critère de Cauchy : soit $L = \lim_{n\to\infty} (u_n)^{1/n}$. Si $L < 1$ la série converge ; si $L > 1$ la série diverge ;
- critère de comparaison : si $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = L$ avec $0 < L < \infty$ alors les deux séries de terme général u_n et v_n sont de même nature.

Pour une série alternée $u_n = (-1)^n a_n$ avec $a_n > 0$ on a le critère de Leibniz : si à partir d'un rang N la suite a_n est monotone décroissante et $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ (condition nécessaire) alors la série converge.

Séries de fonctions

Le terme général est une fonction : $x \to u_n(x)$. De ce fait la somme de la série est aussi une fonction $x \to S(x)$. À x fixé on est ramené à une série numérique. La convergence de la série est alors assujettie à la valeur de la variable (convergence simple). On parle de *domaine de convergence*.

S'il existe une série numérique *convergente* à termes positifs a_n telle qu'à partir d'un rang N on a $|u_n(x)| \leqslant a_n \ \forall x \in [a, b]$ alors la série de terme général $u_n(x)$ est *uniformément (et absolument) convergente* dans $[a, b]$ et la somme de la série est une fonction continue dans cet intervalle (critère de Weierstrass).

- *Cas particulier : les séries entières* $u_n(x) = a_n x^n$

Le domaine de convergence est l'intervalle $]-R, R[$ où $R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ est appelé *rayon de convergence* de la série (dans $\mathbb{C}$ le domaine de convergence est un disque de rayon R). Dans le domaine de convergence la somme d'une série entière est une fonction continue. La série est dérivable et intégrable terme à terme.

Exemples de séries entières

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad |x| < 1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x \quad |x| < \infty$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x) \quad |x| < 1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \cos x \quad |x| < \infty$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin x \quad |x| < \infty$$

c) Équations différentielles

Il existe des méthodes générales de résolution dans un petit nombre de cas rappelés ci-dessous :

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

- *Équations du premier ordre* $F(x, y, y') = 0$
- les équations aux variables séparables : l'équation peut être mise sous la forme $f(y)dy = g(x)dx$ et intégrée directement ;
- les équations linéaires : elles sont de la forme

$$a_0(x)y' + a_1(x)y = f(x)$$

la solution générale est de la forme : $y(x) = \alpha y_1(x) + y_0(x)$ où $y_1(x) = \exp\left[-\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx\right]$ est une solution de l'équation sans second membre, α une constante arbitraire et $y_0(x)$ une solution particulière de l'équation complète, qui peut s'obtenir par *variation de la constante* : $y_0(x) = y_1(x)\int^x \frac{f(x')}{a_0(x')y_1(x')}dx'$.

- *Équations linéaires du second ordre à coefficients constants*

$$a_0y'' + a_1y' + a_2y = f(x)$$

L'équation sans second membre se résout en posant $y(x) = e^{rx}$ où $r \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est déterminé par identification. La solution particulière de l'équation complète s'obtient par identification selon la forme du second membre ou par la méthode de variation de la constante.

1.2 Les fonctions utilisées en physique

- *Fonctions* continues *ou* continues par morceaux, *à dérivées continues ou continues par morceaux*

Une fonction est de classe $\mathcal{C}^k$ sur un intervalle I (éventuellement $\mathbb{R}$) si elle est continue sur I ainsi que ses k premières dérivées. Une fonction $\mathcal{C}^\infty$ est indéfiniment dérivable.
Une fonction continue par morceaux a des discontinuités de première espèce (de saut fini) et est continue sur les intervalles délimités par les discontinuités.

Exemples

1. la fonction valeur absolue $t \to |t|$ est $\mathcal{C}^1$ par morceaux car elle est continue ($\mathcal{C}^0$) et sa dérivée première est continue par morceaux ;
2. la fonction (ou échelon) de *Heaviside*

$$\begin{aligned} u : t \to u(t) &= 0 \text{ pour } t < 0 \\ &= 1 \text{ pour } t > 0 \end{aligned}$$

est continue par morceaux (ou $\mathcal{C}^0$ par morceaux) ;
3. les fonctions *causales* sont nulles pour $t < 0$. Elles satisfont l'identité $f = uf$ où u est la fonction de Heaviside.

- *Fonctions périodiques*

$\exists\ T > 0 : f(t+T) = f(t)\ \forall t$. Le plus petit réel positif T qui satisfait cette identité est la période de la fonction qui est alors qualifiée de T–périodique. Exemple : la fonction harmonique $t \to \exp\left(2i\pi\dfrac{t}{T}\right)$. La fréquence est définie par $\nu = \dfrac{1}{T}$ et la pulsation par $\omega = 2\pi\nu = \dfrac{2\pi}{T}$.

- *Fonctions caractérisées par leurs propriétés d'intégration*

- Les fonctions *sommables* (ou intégrables) sont celles dont l'intégrale $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f(t)|\,dt$ est bornée. Elles forment un espace vectoriel noté $\mathcal{L}^1$.
- Les fonctions de *carré sommable* sont celles dont l'intégrale $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2\,dt$ est bornée. Elles forment un espace vectoriel noté $\mathcal{L}^2$. Ces fonctions modélisent en particulier les signaux d'énergie finie ou encore les fonctions d'ondes de la mécanique quantique.
- On peut définir plus généralement l'espace $\mathcal{L}^k$ pour k quelconque dont les deux espaces $\mathcal{L}^1$ et $\mathcal{L}^2$ sont des cas particuliers très utilisés en physique et théorie du signal.
- Les fonctions *localement sommables* sont celles dont l'intégrale $\displaystyle\int_I |f(t)|\,dt$ est bornée sur tout intervalle I fermé borné. Elles forment un espace vectoriel noté $\mathcal{L}^1_{loc}$. On utilise parfois $\mathcal{L}^2_{loc}$ l'ensemble des fonctions de carré localement sommable.
  Il est clair que les fonctions de $\mathcal{L}^1$ sont localement sommables (et celles de $\mathcal{L}^2$ de carré localement sommable).

- *Fonctions tempérées*

Ce sont les fonctions localement sommables et à croissance lente, c'est-à-dire celles qui croissent au plus comme une puissance (finie) de t. Autrement dit on peut trouver un entier N non négatif borné tel que $\displaystyle\lim_{|t|\to\infty} \frac{f(t)}{t^N} = 0$. Notons qu'une fonction décroissante à l'infini est forcément à croissance lente.
La plupart des fonctions utilisées en physique sont des fonctions tempérées.

- *Égalité presque partout*

On dit que deux fonctions f et g sont égales presque partout et on note $f \overset{pp}{=} g$ si $f(t) = g(t)$ $\forall t$ sauf sur un ensemble dénombrable de valeurs de t (ensemble de mesure nulle). Par exemple la dérivée de la fonction de Heaviside est presque partout nulle. Les fonctions égales presque partout ont comme propriété :

$$f \overset{pp}{=} g \Leftrightarrow \int_I f(t)dt = \int_I g(t)dt \quad \forall I$$

Cette propriété entraîne que les éléments de $\mathcal{L}^1$ (de $\mathcal{L}^2$) sont en fait les classes d'équivalence des fonctions égales presque partout et (de carré) sommables.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

- *Modélisation des signaux impulsionnels*

L'impulsion δ de Dirac (définition « phénoménologique » ; pour une théorie rigoureuse voir le chapitre 5).

$$\begin{aligned}
\forall f \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a)\ f(t)\ dt &= f(a) \\
\forall f \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(t)\ f(t) dt &= (-1)^n\ f^{(n)}(0) \\
g(t)\delta(t-t_0) &= g(t_0)\delta(t-t_0) \\
\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t) & \qquad \text{en particulier } \delta(-t) = \delta(t)
\end{aligned}$$

La notation $\forall f$ doit rester compatible avec l'existence des valeurs de f qui y apparaissent $(f(0), f(a), f'(0), ...)$.
Si f est discontinue en t_0 avec pour saut σ on peut écrire $f(t) = f_c(t) + \sigma u(t-t_0)$ où f_c est continue, alors :

$$\begin{aligned}
\text{au sens des fonctions} \quad &\rightarrow \quad f'(t) = f_c'(t) \quad \text{presque partout} \\
\text{au sens des distributions} \quad &\rightarrow \quad f'(t) = f_c'(t) + \sigma\delta(t-t_0)
\end{aligned}$$

En particulier, au sens des distributions $u'(t) = \delta(t)$.

- *Formule de Leibniz sur la dérivée $n^{ième}$ d'un produit de deux fonctions*

$$[u\,(x)\,v\,(x)]^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\ [u\,(x)]^{(k)}\,[v\,(x)]^{(n-k)}$$

où C_n^k est le coefficient du binôme : $C_n^k = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$.

Définitions

Fonction de Heaviside : $u(t) = 0$ pour $t < 0$ $= 1$ pour $t > 1$
Fonction « signe » : $\text{sign}(t) = -1$ pour $t < 0$ $= 1$ pour $t > 0$ $= 2u(t) - 1$
Fonction « porte » : $\Pi_T(t) = 1$ pour $t \in \left[-\dfrac{T}{2}, \dfrac{T}{2}\right]$ $= 0$ sinon
Fonction « triangle » : $\Lambda_T(t) = \left(1 - \dfrac{\lvert t\rvert}{T}\right)\ u\left(T - \lvert t\rvert\right)$
Fonction sinus cardinal : $sinc(t) = \dfrac{\sin(\pi t)}{\pi t}$

1.3 Les Séries de Fourier

- f est une fonction T–périodique sommable sur tout intervalle Δ fermé de longueur T ; on note $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ la pulsation fondamentale. On appelle *coefficient de Fourier* de f :

$$c_n = \frac{1}{T} \int_\Delta f(t)\, e^{-in\omega t}\, dt \qquad n \in \mathbb{Z}$$

On définit la *série de Fourier de* f :

$$S_F(f;t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\, e^{in\omega t}$$

  - Si en $t_0 \in \Delta$, f et f'ont une valeur à droite et une valeur à gauche alors (théorème de Dirichlet)

$$S_F(f;t_0) = \frac{1}{2}\left[f(t_0^+) + f(t_0^-)\right]$$

  - Si f est continue et f'continue par morceaux alors $S_F(f;t) = f(t)$ uniformément $\forall t$ et la série de Fourier de f' s'obtient en dérivant celle de f terme à terme.
  - Si f est $\mathcal{C}^{k-1}$ et $f^{(k)}$ est continue par morceaux alors $|c_n| \simeq \dfrac{1}{n^{k+1}}$ pour n grand.

- Série de Fourier de fonctions *réelles* : f réelle $\Rightarrow c_{-n} = \overline{c_n}$ (complexe conjugué de c_n) ; alors

$$\begin{aligned}
S_F(f;t) &= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t \\
a_n &= c_n + c_{-n} \quad b_n = i(c_n - c_{-n}) \quad \Leftrightarrow \quad c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) \quad c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n) \\
a_0 &= \frac{2}{T}\int_\Delta f(t)\, dt \quad a_n = \frac{2}{T}\int_\Delta f(t) \cos n\omega t\, dt \quad b_n = \frac{2}{T}\int_\Delta f(t) \sin n\omega t\, dt
\end{aligned}$$

- On rappelle la *relation de Parseval* (pour $f \in \mathcal{L}^2(\Delta)$)

$$\frac{1}{T}\int_\Delta |f(t)|^2\, dt = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2 = \left(\frac{a_0}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right)$$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

1.4 Les fonctions définies par des intégrales

Quelques fonctions usuelles

Fonctions eulériennes	
La fonction Gamma $\Gamma(x)$	**La fonction Bêta** $B(x,y)$
$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1}\, dt \quad x \in \mathbb{R}^{*+}$	Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^{*+2}$ $B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}\,(1-t)^{y-1}\, dt$
$\Gamma^{(n)}(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\,(\ln t)^n t^{x-1}\, dt \quad x \in \mathbb{R}^{*+}$	$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta)^{2x-1}\,(\sin\theta)^{2y-1} d\,\theta$ $= \int_0^{\infty} \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}}\, dt$
$\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\mathbb{Z}^-\}$	
$\Gamma(1) = 1, \quad \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ $\Gamma'(1) = -\gamma \quad \Gamma'(\frac{1}{2}) = -(\gamma + \ln 4)\sqrt{\pi}$ $\gamma = 0,577...$ constante d'Euler	$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \quad \forall x, y, x+y \in \mathbb{R} \setminus \{\mathbb{Z}^-\}$
$\Gamma(n+1) = n! \quad \Gamma(n+\frac{1}{2}) = \frac{(2n)!}{2^{2n}\, n!}\sqrt{\pi}.$	$B(x, 1-x) = \Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x} \quad x \notin \mathbb{Z}$

Toutes les fonctions ci-dessous sont définies sur $\mathbb{R}^{*+}$; certaines peuvent être prolongées sur $\mathbb{R}^+$ ou même sur $\mathbb{R}$.

Fonction Erreur $\mathrm{Erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt$	**Erreur complémentaire** $\mathrm{Erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-t^2}\, dt$
Sinus Intégral $\mathrm{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt$	**Exp^{elle} Intégrale** E_n $\quad \mathrm{E_n}(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^n}\, dt \;\; n \in \mathbb{N}^*$
Cosinus Intégral $\mathrm{Ci}(x) = -\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\, dt$	**Exp^{elle} Intégrale** E_i $\quad \mathrm{E_i}(x) = PP \int_{-\infty}^x \frac{e^t}{t}\, dt$

Produit de convolution

$$f * g : t \to (f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t - t')\, g(t')\, dt'$$

$$\text{Si } f \text{ et } g \text{ sont causaux } : (f * g)(t) = u(t) \int_0^t f(t - t')\, g(t')\, dt'$$

On utilise couramment la notation (abusive) $f(t) * g(t)$.

- *Propriétés*
- symétrie : $f * g = g * f$
- si $f \in \mathcal{L}^1$ et $g \in \mathcal{L}^1$ alors $f * g \in \mathcal{L}^1$
- si $f \in \mathcal{L}^1$ et g' est continue et bornée à l'infini alors $(f * g)' = f * g'$

ÉNONCÉS DES EXERCICES

1.1 Intégrales généralisées

1 Étudier la convergence des intégrales suivantes :

(a) : $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} dx$ **(b)** : $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{(x+1)\sqrt[3]{x}} dx$

(c) : $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x+1}{\sqrt{x\left(x^3+1\right)}} dx$ **(d)** : $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x} \cos x\, dx$

2 Étudier en fonction de α la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{x+1} dx$

3 L'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x^3+1} dx$ est-elle convergente au sens standard ? au sens de la partie principale ? Si oui la calculer.

1.2 Séries

1 Déterminer la nature (convergente ou divergente) des séries :

(a) : $\displaystyle\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ **(b)** : $\displaystyle\sum_{n=0}^\infty \frac{2^n+1}{3^n+n}$ **(c)** : $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{\ln n}{n^2}$ **(d)** : $\displaystyle\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

2 Pour quelles valeurs de a la série de terme général $(1-a)^n$ est-elle convergente ? Calculer sa somme.

3 Calculer la somme de la série $\displaystyle\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!}$.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

4 Soit deux séries numériques absolument convergentes de terme général respectivement a_n et b_n. Montrer que la série de terme général $a_n \cos nx + b_n \sin nx$ est uniformément convergente $\forall x \in \mathbb{R}$.

1.3 Équations différentielles

1 Résoudre les équations différentielles du premier ordre :

$$\textbf{(a)}\ y' + y^2 \sin x = 0 \text{ avec } y(0) = 1 \quad \textbf{(b)}\ y' = a^2 - y^2 \quad \textbf{(c)}\ (1+x)\, y' + \frac{y}{x} = \frac{1}{x^2}$$

2 Résoudre les équations différentielles du second ordre :

$$\textbf{(a)}\ y'' + 2y' + 2y = 2x - \sin x \quad \textbf{(b)}\ y'' + y = \ln|\cos x|$$

1.4 Impulsion de Dirac

1 Établir les propriétés suivantes de l'impulsion de Dirac :

(a) $\displaystyle\int_a^b f(t)\delta(t - t_0)dt = f(t_0)$ si $t_0 \in]a, b[$ et 0 sinon.

(b) $\displaystyle\delta(at + b) = \frac{1}{|a|}\delta(t + \frac{b}{a})$

2 Calculer :

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} (2t + 3)\delta(t + 1)dt$ **(b)** $\displaystyle\int_0^{\infty} t e^{-t^2} \delta(t + 1)dt$

(c) $\displaystyle\int_{-1}^{2} (t^3 + 3t^2)\delta'(t - 1)dt$ **(d)** $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} t \cos(t)\, \delta^{(n)}(t)dt$

3 Calculer $t^n \delta^{(k)}(t)$. En déduire n solutions indépendantes au sens des distributions des équations :

$$\begin{aligned} t^n T &= 0 \\ t^n T &= \delta \end{aligned}$$

4 *Potentiel coulombien à une dimension* :

a) Calculer « au sens des distributions » la dérivée seconde de $x \mapsto |x|$.

b) On place une particule ponctuelle de charge q à l'origine ($x = 0$) dans un espace à une dimension (une ligne). Le potentiel créé par la charge à l'abscisse x est solution de l'équation de Poisson à une dimension

$$V''(x) = -\frac{q}{\epsilon_0}\delta(x)$$

Trouver la solution de cette équation qui soit une fonction paire.

c) On place sur la ligne une autre particule, de charge $-q$. À l'instant $t = 0$ elle est située en $x_0 \neq 0$ et possède une vitesse v_0. Montrer que quelle que soit sa vitesse initale v_0 elle ne peut pas échapper à l'attraction de la particule localisée en $x = 0$.
On rappelle que la force que ressent en x la particule de charge $-q$ plongée dans le potentiel $V(x)$ est : $F(x) = qV'(x)$.

1.5 Séries de Fourier ; propriétés, dérivation

1 Développer en série de Fourier la fonction T–périodique suivante :

$$\begin{array}{rcll} f(t) & = & at & -T/2 \leqslant t \leqslant 0 \\ & = & bt & 0 \leqslant t < T/2 \end{array}$$

où $|a| \neq |b|$. Discuter les cas $a = \pm b$.

2 Développer en série de Fourier la fonction T–périodique suivante :

$$\begin{array}{rcll} g(t) & = & a & -T/2 \leqslant t < 0 \\ & = & b & 0 \leqslant t < T/2 \end{array}$$

3 Comment peut-on comparer ce résultat à celui de la question précédente ?

1.6 Série de Fourier et somme de séries

Développer en série de Fourier la fonction paire et 2π–périodique définie pour $t \in [0, \pi]$ par $f(t) = e^{-at}$.
En déduire la valeur de la somme des séries numériques :

$$S_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + a^2} \quad ; \quad S_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2}$$

1.7 Série de Fourier

Développer en série de Fourier la fonction 2π–périodique définie par : $f(t) = \sin(\omega_0 t)$ pour $-\pi \leqslant t < \pi$ avec $\omega_0 \in]0, 1[$. Que se passe-t-il quand $\omega_0 \to 1$?

1.8 Série de Fourier et équations différentielles

Trouver une solution particulière périodique de l'équation $y''(t) - 4y(t) = f(t)$ où f est 2π-périodique définie par $f(t) = |t|$ pour $t \in [-\pi, \pi]$.

1.9 Séries de Fourier sinus et séries de Fourier cosinus

Soit f une fonction satisfaisant les critères de Dirichlet sur $]0, L[$. Construire une série de Fourier de périodes $2L$ ne comportant que des termes en sinus (cosinus) et qui coïncide avec f sur $]0, L[$.
Applications :

- Développer en série de Fourier-cosinus sur $[0, \pi]$ la fonction $f(t) = \sin t$.
- Construire la série de Fourier-sinus puis la série de Fourier-cosinus qui coïncident avec la fonction $t \to \cosh t$ sur $]0, 1[$.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

1.10 Fonctions eulériennes

1 Calculer $\Gamma(\frac{5}{2})$, $B(2, -\frac{1}{2})$, $\Gamma(n+\frac{1}{2})$ et en déduire $\Gamma(-n+\frac{1}{2})$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.

2 Calculer $J_n = \int_0^\infty t^n e^{-at^2} \ln t \, dt \quad (n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R}^{*+})$ en termes de Γ et de Γ'.
Donner la valeur de J_0 et de J_1.

1.11 Calcul d'intégrales

Calculer les intégrales suivantes :

1 $I_1 = \int_0^\infty t^\alpha e^{-\beta t} dt \quad (\beta > 0, \alpha > -1)$

2 $I_2 = \int_0^\infty \frac{e^{-at}}{\sqrt{t+b^2}} dt \quad (a, b > 0)$

3 $I_3 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t\,(1-t)}} dt$

4 $I_4(x) = \int_x^\infty e^{-(at^2+2bt+c)} dt \quad (a > 0)$

5 $I_5 = \int_0^{\pi/2} (\tan\theta)^\alpha d\theta \quad \alpha \in]-1, 1[$

6 $I_6 = \int_0^\infty \cos(pt)\mathrm{Ci}(t) dt$

7 $I_7 = \int_0^\infty \frac{e^{-at}}{t+b} dt \quad (a, b > 0)$

8 $I_8 = \int_\alpha^\beta \frac{e^{-at}}{t+b} dt \quad (a > 0\,;\, -b \notin [\alpha, \beta])$

9 $I_9 = \int_1^\infty \frac{\sqrt{\ln t}}{t^2} dt$

10 $I_{10} = \int_0^\infty \frac{\sin at}{t+b} dt \quad (b > 0)$

11 $I_{11} = \int_0^\infty \frac{1}{1+t^{2n}} dt \quad (n \in \mathbb{N}^*)$

12 $I_{12} = \int_0^3 (9-t^2)^{\frac{3}{2}} dt$

1.12 Produit de convolution

1 Calculer les produits de convolution $f * g$ (les fonctions Π_a et Λ_a ci-dessous sont définies dans le rappel de cours) :

(a) $f(t) = \Pi_2(t) \qquad g(t) = f(t)$

(b) $f(t) = \Pi_2(t) \qquad g(t) = 2\Lambda_2(t) = (2-|t|)\,u(2-|t|)$

(c) $f(t) = \sin t \qquad g(t) = a\Lambda_a(t) = (a-|t|)\,u(a-|t|) \quad a > 0$

(d) $f_a(t) = \frac{1}{\Gamma(a)} t^{a-1} e^{-t} u(t) \quad a > 0 \qquad f_b(t) = \frac{1}{\Gamma(b)} t^{b-1} e^{-t} u(t) \quad b > 0$

2 Calculer $f * \delta^{(n)}$.

3 On désigne par f_a la fonction définie pour $a > 0$ par $f_a(t) = \dfrac{1}{a\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2a^2}$;

a) Montrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha t^2+\beta t} dt = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \exp\left(\frac{\beta^2}{4\alpha}\right)$

b) Calculer $f_a * f_b$.

c) Calculer $f_a^{*3} = f_a * f_a * f_a$ puis f_a^{*n} (n entier positif).

ÉNONCÉS DES PROBLÈMES

Problème 1.1 Équation de la chaleur

Trouver à l'aide des séries de Fourier la solution du problème suivant :

$$\begin{array}{rcl} u(x,t) & & \text{définie pour } x \in [0,l] \text{ et } t > 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} & = & \alpha \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \beta u \qquad \alpha > 0 \quad ; \quad \beta > 0 \\ u(0,t) & = & u(l,t) = 0 \quad t \geqslant 0 \\ u(x,0) & = & x(l-x) \quad x \in [0,l] \end{array}$$

Problème 1.2 Séries de Fourier, polynômes de Bernouilli et fonction ζ de Riemann

Les polynômes de Bernouilli sont définis par :

$$B_1(x) = x - \frac{1}{2}$$

$$\left.\begin{array}{rcl} B_n'(x) & = & B_{n-1}(x) \\ B_n(1) & = & B_n(0) \end{array}\right\} n \geqslant 2$$

On veut déterminer la série de Fourier $\mathcal{S}_n$ de période 1, qui coïncide avec B_n pour $x \in]0,1[$.

1 Déterminer $\mathcal{S}_1$.

2 Établir que le coefficient a_0 de $\mathcal{S}_n$ est nul $\forall n$.

3 Quelle relation existe-t-il entre $\mathcal{S}_n$ et $\mathcal{S}_{n-1}$? En déduire l'expression de $\mathcal{S}_n$; on distinguera le cas n pair du cas n impair.

4 Justifier que $\mathcal{S}_n(0) = B_n(0)$ pour $n \geqslant 2$. Calculer $B_2(x)$ et $B_4(x)$ et en déduire $\zeta(2)$ et $\zeta(4)$ où la fonction ζ de Riemann est définie par :

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

Problème 1.3 Phénomène de Gibbs

1 Soit f une fonction 2π–périodique admettant un développement en série de Fourier et $S_N(t)$ la somme partielle d'ordre N de la série de Fourier

$$S_N(t) = a_0/2 + \sum_{n=0}^{N} a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)$$

a) Montrer que

$$a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t') \cos(n(t'-t))dt'$$

b) En déduire que

$$S_N(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t') \frac{\sin\left[(N+\frac{1}{2})(t'-t)\right]}{\sin\left[\frac{1}{2}(t'-t)\right]} dt'$$

2 Soit la fonction f, impaire, 2π–périodique, définie par $f(t) = 1$ sur $[0, \pi[$.

a) Déterminer sa série de Fourier.

b) En utilisant le résultat de la question **1** **b)** montrer que pour $t \in]-\pi, \pi[$

$$S_N(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-t}^{t} \frac{\sin\left[(N+\frac{1}{2})u\right]}{\sin\left(\frac{1}{2}u\right)} du - \frac{1}{2\pi} \int_{\pi-t}^{\pi+t} \frac{\sin\left[(N+\frac{1}{2})u\right]}{\sin\left(\frac{1}{2}u\right)} du$$

c) On regarde le voisinage de $t = 0$ et on se place pour N grand. Montrer que dans cette situation la seconde intégrale est négligeable devant la première et que

$$S_N(t) \simeq \frac{1}{\pi m} \int_0^{mt} \frac{\sin v}{\sin\left(\frac{v}{2m}\right)} dv$$

où on a posé $m = N + \dfrac{1}{2}$, $v = um$.

d) En déduire que le premier maximum de $S_N(t)$ apparaît pour $t \simeq \dfrac{\pi}{m} \simeq \dfrac{\pi}{N}$. Montrer qu'une valeur approchée du premier maximum de $S_N(t)$ est donnée par

$$S_N^{\max} \simeq \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin \xi}{\xi} d\xi$$

Quelle remarque peut-on faire au vu de ce résultat ?

Problème 1.4 Formule de Stirling pour la fonction Γ

1 Montrer que

$$\int_0^1 \ln \Gamma(t) dt = \ln \sqrt{2\pi}$$

2 On définit pour $x \geqslant 0$

$$F(x) = \int_x^{x+1} \ln \Gamma(t) dt$$

a) Calculer $F'(x)$.

b) À l'aide du résultat de la question **1** en déduire l'expression de $F(x)$.

3 En appliquant la règle des trapèzes (voir formulaire) à l'intégrale qui définit la fonction F montrer que (formule de Stirling)

$$x \gg 1 \Rightarrow \Gamma(x+1) = \sqrt{2\pi}\, x^{x+\frac{1}{2}}\, e^{-x} \left(1 + o\left(1/x\right)\right)$$

Formulaire

$$\int_0^1 \ln \sin(\pi\theta) d\theta = -\ln 2$$

$$0 < \frac{d^2}{dx^2} \ln \Gamma(x) \leqslant \frac{1}{x-1} \qquad \text{pour } x > 1$$

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{2}(b-a)\left[f(a) + f(b)\right] - \frac{1}{12}(b-a)^3 f''(\theta) \qquad \text{avec } \theta \in \,]a, b[$$

DU MAL À DÉMARRER ?

1.1 **1** et **2** Utiliser les critères de convergence.

3 Décomposer $\dfrac{1}{x^3+1}$ en éléments simples. Dans cette même question pour intégrer les éléments simples prendre la partie principale à l'infini (justifier).

1.2 **1** et **2** Utiliser les critères de convergence.

3 Utiliser la table de séries entières.

1.3 **2** Seconde équation : utiliser la méthode de variation des constantes.

1.4 **1** **a)** Définir une fonction $g(t) = f(t)$ pour $t \in \,]a, b[$ et $g(t) = 0$ sinon.

2 **d)** et **3** : Utiliser la formule de Leibniz. **4** **a)** : La dérivée d'une fonction discontinue est différente selon qu'on la calcule au sens des fonctions ou au sens des distributions.

1.5 Vérifier les symétries éventuelles de la fonction selon les valeurs de a et b.

3 On remarque que $g = f'$.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

1.6 La fonction est continue donc elle est égale à sa série de Fourier en particulier en $t = 0$ et $t = \pi$.

1.7 Prendre soigneusement la limite $\omega_0 \to 1$.

1.8 L'équation différentielle ne fait intervenir que des dérivées paires et le second membre est une fonction paire ; on cherche donc la solution sous la forme d'une série de Fourier paire.

1.9 Prolonger la fonction f sur $]-L, 0[$ de façon à obtenir une fonction paire (impaire) et prolonger la fonction ainsi définie $]-L, L[$ sur $\mathbb{R}$ par périodicité de période $2L$.

1.10 Attention (voir table dans les rappels de cours) : on définit $\Gamma(x)$ pour $x < 0$ non entier en prolongeant les valeurs pour $x > 0$ à l'aide de l'identité $\Gamma(x) = \dfrac{\Gamma(x+n)}{x(x+1)\cdots(x+n-1)}$ pour $x \in]-n, -n+1[$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

1.11 I_2 : poser $u = \sqrt{t+b^2}$; I_6 : intégrer par parties et utiliser $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin(\alpha t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}\,\mathrm{sign}(\alpha)$; I_8 : distinguer le cas $\alpha < \beta < -b$ du cas $-b < \alpha < \beta$; I_9 : poser $t = e^u$; I_{11} : poser $u = t^{2n}$; I_{12} : poser $u = t^2/9$.

1.12 1 **a)** et **b)** On peut utiliser un raisonnement graphique.

Problème 1.1

Les conditions aux limites suggèrent de chercher des solutions de la forme

$$u(x,t) = \sum_{n \geqslant 1} b_n(t) \sin n\pi \frac{x}{l} \ ;$$

pour implémenter la condition initiale utiliser les séries de Fourier sinus (exercice 1.9).

Problème 1.2

1 Remarquer que la série de Fourier $\mathcal{S}_1$ est une fonction impaire. Dans la suite, attention à ne pas faire de confusion entre l'indice n qui numérote les polynômes de Bernouilli et l'indice k qui repère les coefficients de Fourier.

2 La relation de récurrence entre les $a_k(n)$ et les $b_k(n+1)$ sera transformée en relations par pas de deux dans une même série de coefficients.

Problème 1.3

2 **b)** Dans l'expression de $S_N(t)$ on fera un changement de variable $u = t - t'$ dans l'intégrale entre $-\pi$ et 0 et $u = t' - t$ dans l'autre intégrale.

2 **c)** On établira que pour $t \sim 0$ les deux intégrales de la question 4 sont de la forme

$$\int_{a-\epsilon}^{a+\epsilon} g(t)dt = 2\epsilon g(a) + o(\epsilon).$$

Problème 1.4

1 On fera le changement de variable $t' = 1 - t$. Dans tout le problème, utiliser les propriétés de la fonction Γ.

Corrigés des exercices

1.1 **1** Convergence des intégrales :

a) La fonction $\dfrac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$ est non bornée en 0 et 1 qui sont les deux bornes de l'intégrale. Pour $x \sim 0$: $\dfrac{1}{\sqrt{x(1-x)}} \sim \dfrac{1}{\sqrt{x}} = \dfrac{1}{x^{1/2}}$; le critère de comparaison avec l'intégrale de Riemann est applicable avec $\alpha = \dfrac{1}{2} < 1$ donc l'intégrale converge à la borne inférieure. Pour $x \sim 1$: $\dfrac{1}{\sqrt{x(1-x)}} \sim \dfrac{1}{\sqrt{1-x}} = \dfrac{1}{(1-x)^{1/2}}$; là encore le critère de comparaison avec l'intégrale de Riemann est applicable avec $\alpha = \dfrac{1}{2} < 1$ donc l'intégrale converge aussi à la borne supérieure ; elle est donc *convergente.*

b) La fonction $\dfrac{1}{(x+1)\sqrt[3]{x}}$ est non bornée en -1 et 0. Pour $x \sim 0$: $\dfrac{1}{(x+1)\sqrt[3]{x}} \sim \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} = \dfrac{1}{x^{1/3}}$; le critère de comparaison avec l'intégrale de Riemann est applicable avec $\alpha = \dfrac{1}{3} < 1$ donc l'intégrale converge en 0. Pour $x \sim -1$: $\dfrac{1}{(x+1)\sqrt[3]{x}} \sim \dfrac{1}{-(x+1)}$; le critère de comparaison avec l'intégrale de Riemann est applicable avec $\alpha = 1$ donc l'intégrale diverge à la borne inférieure ; elle est donc *divergente.*

c) Pour $x \sim 0$: $\dfrac{x+1}{\sqrt{x\left(x^3+1\right)}} \sim \dfrac{1}{\sqrt{x}}$; on a donc de nouveau $\alpha = \dfrac{1}{2} < 1$ et l'intégrale converge en 0. À l'infini $\dfrac{x+1}{\sqrt{x\left(x^3+1\right)}} \sim \dfrac{1}{x}$. On a ici $\alpha = 1$ donc l'intégrale diverge à l'infini ; elle est donc *divergente.*

d) On a $\left|e^{-x}\cos x\right| \leqslant e^{-x}$ qui est intégrable entre 0 et l'infini. Donc l'intégrable est *convergente.*

2 Étudions la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{x+1}dx$: en $x \sim 0$:

$$\frac{x^{\alpha-1}}{x+1} \sim x^{\alpha-1} = \frac{1}{x^{1-\alpha}}.$$

Le critère de comparaison avec l'intégrale de Riemann conduit à $1-\alpha < 1 \Rightarrow \alpha > 0$. À l'infini $\dfrac{x^{\alpha-1}}{x+1} \sim \dfrac{1}{x^{2-\alpha}}$. Le critère de comparaison avec l'intégrale de Riemann conduit à $2-\alpha > 1 \Rightarrow \alpha < 1$. Finalement l'intégrale converge pour $\alpha \in \,]0, 1[$.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

3 À l'infini $\dfrac{1}{x^3+1} \sim \dfrac{1}{x^3}$ qui décroît plus vite que $\dfrac{1}{x}$. L'intégrale converge donc à l'infini. La fonction $\dfrac{1}{x^3+1}$ est non bornée en $x=-1$. Au voisinage de $x=-1$:

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{1}{(x+1)\left(x^2-x+1\right)} \sim \frac{1}{(x+1)} = \frac{1}{(x+1)^\alpha}$$

avec $\alpha = 1$. L'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^3+1}dx$ est donc divergente au sens standard.
Au sens de la partie principale :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x^3+1} &= \frac{1}{(x+1)\left(x^2-x+1\right)} = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{x+1} - \frac{x-2}{x^2-x+1}\right] \\
\mathrm{PP}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^3+1}dx &= \frac{1}{3}\left[\mathrm{PP}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x+1}dx - \mathrm{PP}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x-2}{x^2-x+1}dx\right]
\end{aligned}$$

L'intégrale originelle est convergente à l'infini mais dans la décomposition de la fraction rationnelle on fait apparaître deux intégrales, chacune étant divergente au sens standard. Comme l'intégrale de départ est convergente (à l'infini) on peut donc aussi bien la prendre en partie principale et donc chacune des deux intégrales ci-dessus sera calculée en partie principale à l'infini ce qui permet de récupérer la partie finie de la somme des deux intégrales. En outre, la première sera calculée aussi en partie principale en -1.

$$\begin{aligned}
\mathrm{PP}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x+1}dx &= \lim_{R\to\infty}\lim_{\epsilon\to 0}\left\{\int_{-R}^{-1-\epsilon} \frac{1}{x+1}dx + \int_{-1+\epsilon}^{R} \frac{1}{x+1}dx\right\} \\
&= \lim_{R\to\infty}\lim_{\epsilon\to 0}\left\{\ln|x+1|\big|_{-R}^{-1-\epsilon} + \ln|x+1|\big|_{-1+\epsilon}^{R}\right\} \\
&= \lim_{R\to\infty}\lim_{\epsilon\to 0}\left\{\ln\epsilon - \ln(R-1) + \ln(R+1) - \ln\epsilon\right\} = \lim_{R\to\infty}\ln\frac{R+1}{R-1} = 0
\end{aligned}$$

Dans l'autre intégrale, le dénominateur ne s'annule pas. Faisons le changement de variable $u = x - \dfrac{1}{2}$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{PP}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x-2}{x^2-x+1}dx &= \mathrm{PP}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{u-\frac{3}{2}}{u^2+\frac{3}{4}}du \\
&= \lim_{R\to\infty}\left\{\int_{-R}^{R} \frac{u}{u^2+\frac{3}{4}}du - \frac{3}{2}\int_{-R}^{R} \frac{1}{u^2+\frac{3}{4}}du\right\} \\
&= -\frac{3}{2}\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2u}{\sqrt{3}}\bigg|_{-\infty}^{\infty} = -\pi\sqrt{3}
\end{aligned}$$

où la première des deux intégrales dans la deuxième ligne est nulle par symétrie (intégrale d'une fonction impaire sur un intervalle symétrique par rapport à l'origine). En regroupant les

résultats on obtient

$$\mathrm{PP}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^3+1}dx = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

Ce qu'il faut retenir de cet exercice

Ce dernier exercice met bien en évidence le rôle de la limite symétrique dans la définition d'une intégrale en partie principale puisque la compensation des infinis se fait grâce à cette symétrie.

1.2 **1** Déterminons la nature des séries :

a) Le terme général $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}} \sim \dfrac{1}{n}$ pour n grand. La série est de même nature que celle de terme général $\dfrac{1}{n}$ c'est-à-dire *divergente* (série de Riemann avec $\alpha = 1$).

b) Le terme général $u_n = \dfrac{2^n+1}{3^n+n} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n \dfrac{1+1/2^n}{1+n/3^n} \sim \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ pour n grand. La série est de même nature que celle de terme général $\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ qui est une série géométrique de raison $\dfrac{2}{3} < 1$. La série est donc *convergente.*

c) Asymptotiquement le logarithme est dominé par la fonction puissance ; il existe donc $\epsilon \in]0,1[$ et $N(\epsilon)$ tels que $n \geqslant N(\epsilon) \Rightarrow \ln n \leqslant n^{\epsilon}$. On a alors $\dfrac{\ln n}{n^2} \leqslant \dfrac{1}{n^{2-\epsilon}}$. La comparaison avec la fonction de Riemann pour $x = 2-\epsilon > 1$ permet de conclure à la *convergence* de la série.

d) La série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est une série alternée avec $|u_n| = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ qui est monotone décroissant et tend vers zéro. Le critère de Leibniz est satisfait et la série *converge*.

2 La série de terme général $(1-a)^n$ est une série géométrique. Elle converge pour $|1-a| < 1$ c'est-à-dire pour $a \in]0,2[$. Sa somme est $\dfrac{1}{1-(1-a)} = \dfrac{1}{a}$.

3 On peut écrire $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\bigg|_{x=1} = e^1 = 2,718...$

4 Les séries $\displaystyle\sum_n |a_n|$ et $\displaystyle\sum_n |b_n|$ convergent. Il en est de même de la série $\displaystyle\sum_n |a_n| + |b_n|$. Par ailleurs $\displaystyle\sum_n |a_n \cos nx + b_n \sin nx| \leqslant \sum_n |a_n| + |b_n| \ \forall x$. Donc d'après le théorème de Weirstrass la série trigonométrique converge alors uniformément pour tout x et sa somme est une fonction continue.

Ce qu'il faut retenir de cet exercice

Cet exercice fait apparaître l'utilité du critère de comparaison avec la série de Riemann ou avec la série géométrique.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

1.3 **1** On résout les équations différentielles du premier ordre :

a) C'est une équation séparable :

$$\begin{aligned} y' + y^2 \sin x &= 0 \Leftrightarrow \frac{y'}{y^2} = -\sin x \Leftrightarrow -\frac{1}{y} = \cos x + C \Rightarrow y(x) = \frac{-1}{\cos x + C} \\ y(0) &= \frac{-1}{1+C} = 1 \Rightarrow C = -2 \end{aligned}$$

finalement

$$y(x) = \frac{1}{2 - \cos x}$$

b) Là aussi on a une équation séparable :

$$\begin{aligned} y' = a^2 - y^2 \Leftrightarrow \frac{y'}{a^2 - y^2} &= 1 \\ \frac{1}{2a}\left[\frac{y'}{a-y} + \frac{y'}{a+y}\right] &= 1 \Rightarrow \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a+y}{a-y}\right| = x + C \\ \frac{a+y}{a-y} &= K e^{2ax} \Rightarrow y(x) = a\frac{K e^{2ax} - 1}{K e^{2ax} + 1} \end{aligned}$$

c) On a une équation linéaire. On cherche d'abord la solution générale de l'équation sans second membre

$$(1+x)\, y' + \frac{y}{x} = 0$$

qui est séparable

$$\begin{aligned} \frac{y'}{y} &= -\frac{1}{x\,(1+x)} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{1+x} \\ &\Rightarrow y_1(x) = K\frac{x+1}{x} \end{aligned}$$

Recherchons maintenant une solution particulière de l'équation complète par la méthode de variation de la constante :

$$\begin{aligned} y_0(x) &= K\,(x)\,\frac{x+1}{x} \\ (1+x)\, y_0' + \frac{y_0}{x} &= \frac{1}{x^2} \Rightarrow K'\,(x)\,\frac{(x+1)^2}{x} = \frac{1}{x^2} \\ &\Rightarrow K'\,(x) = \frac{1}{x\,(x+1)^2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} \\ &\Rightarrow K\,(x) = \ln\frac{x}{x+1} + \frac{1}{x+1} + C \end{aligned}$$

Ce qui donne finalement

$$y(x) = \frac{x+1}{x} \ln\frac{x}{x+1} + \frac{1}{x} + C\frac{x+1}{x}$$

2 Résolution d'équations différentielles du second ordre.

a) On résout l'équation sans second membre en cherchant des solutions en e^{rx}

$$\begin{aligned} r^2 + 2r + 2 &= 0 \Rightarrow r = -1 \pm i \\ y_0(x) &= e^{-x}\,(A\cos x + B\sin x) \end{aligned}$$

Le second membre est de la forme $f_1(x) + f_2(x)$ avec $f_1(x) = 2x$ et $f_2(x) = -\sin x$. On va donc chercher y_1 et y_2 solutions de

$$\begin{aligned} y_1'' + 2y_1' + 2y_1 &= 2x \\ y_2'' + 2y_2' + 2y_2 &= -\sin x \end{aligned}$$

et la solution recherchée de l'équation complète sera la somme $y_1 + y_2$.
Cherchons y_1 sous la forme d'un polynôme de degré 1 : $y_1(x) = ax + b$. En identifiant on obtient :

$$2a + ax + b \equiv 2x \Rightarrow a = 2\ ,\ b = -4 \Rightarrow y_1(x) = 2x - 4$$

Cherchons y_2 sous la forme d'une combinaison de fonctions trigonométriques :

$$y_2(x) = a\cos x + b\sin x.$$

En identifiant on obtient :

$$(a + 2b)\cos x + (b - 2a)\sin x \equiv -\sin x \Rightarrow a + 2b = 0\ ,\ b - 2a = -1$$

On en déduit $a = \dfrac{2}{5}$ et $b = -\dfrac{1}{5}$ et

$$y_2(x) = \frac{1}{5}\,(2\cos x - \sin x)$$

Finalement la solution générale est donnée par

$$y(x) = e^{-x}\,(A\cos x + B\sin x) + 2x - 4 + \frac{1}{5}\,(2\cos x - \sin x)$$

b) L'équation sans second membre a pour solution $y_1(x) = A\cos x + B\sin x$. Pour trouver la solution particulière de l'équation complète on va utiliser la variation des constantes : on cherche $y_0(x)$ sous la forme

$$\begin{aligned} y_0(x) &= A\,(x)\cos x + B\,(x)\sin x \\ y_0'(x) &= -A\,(x)\sin x + B\,(x)\cos x + A'\,(x)\cos x + B'\,(x)\sin x \end{aligned}$$

On a deux fonctions inconnues $A\,(x)$ et $B\,(x)$, il faut donc deux équations pour les déterminer. L'une sera l'équation différentielle ; pour l'autre imposons

$$A'\,(x)\cos x + B'\,(x)\sin x = 0 \tag{1.1}$$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

ce qui simplifie l'expression de $y_0'(x)$

$$y_0'(x) = -A(x)\sin x + B(x)\cos x$$

Il vient donc pour $y_0''(x)$

$$y_0''(x) = -A(x)\cos x - B(x)\sin x - A'(x)\sin x + B'(x)\cos x$$

En injectant dans l'équation complète on obtient

$$-A'(x)\sin x + B'(x)\cos x = \ln|\cos x| \tag{1.2}$$

On a donc deux équations (1.1) et (1.2) pour A' et B' ; on en tire

$$A'(x) = -\sin x \ \ln|\cos x| \quad ; \quad B'(x) = \cos x \ \ln|\cos x|$$

On en déduit

$$\begin{aligned} A(x) &= \int -\sin x \ \ln|\cos x|\, dx \underset{u=\cos x}{=} \int \ln|u|\, du = u\ln|u| - u \\ &= \cos x \ \ln|\cos x| - \cos x \end{aligned}$$

Pour calculer la primitive qui définit $B(x)$ on intègre par parties :

$$\begin{aligned} B(x) &= \int \cos x \ \ln|\cos x|\, dx = \sin x \ \ln|\cos x| + \int \frac{\sin^2 x}{\cos x} dx \\ &= \sin x \ \ln|\cos x| + \int \frac{1}{\cos x} dx - \int \cos x dx \end{aligned}$$

On calcule

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\cos x} dx \underset{t=\tan x/2}{=} \int \frac{1+t^2}{1-t^2}\frac{2dt}{1+t^2} &= \int \left[\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\right] dt \\ &= \ln\left|\frac{1+\tan x/2}{1-\tan x/2}\right| \end{aligned}$$

Finalement

$$B(x) = \sin x \ \ln|\cos x| - \sin x + \ln\left|\frac{1+\tan x/2}{1-\tan x/2}\right|$$

On reconstitue la solution $y_0(x) = A(x)\cos x + B(x)\sin x$ et on obtient :

$$y(x) = A\cos x + B\sin x + \ln|\cos x| - 1 + \sin x \ \ln\left|\frac{1+\tan x/2}{1-\tan x/2}\right|$$

Ce qu'il faut retenir de cet exercice

La méthode de la variation des constantes est peu connue pour les équations du second ordre. Dans ce dernier calcul, elle est indispensable. On peut aussi trouver une solution particulière à l'aide des séries de Fourier, mais sous une forme non explicite.

1.4 **1** **a)** On introduit une fonction auxiliaire : $g(t) = f(t)$ pour $t \in]a, b[$ et 0 sinon. Ensuite on utilise les définitions

$$\begin{aligned}\int_a^b \delta(t-t_0) f(t)dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) g(t)dt = g(t_0) \\ &= f(t_0) \text{ pour } t_0 \in]a, b[\text{ et 0 sinon}\end{aligned}$$

b) Montrons que $\delta(at+b) = \dfrac{1}{|a|}\delta(t+\dfrac{b}{a})$

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(at+b) f(t)dt \underset{t'=at}{=} sign(a) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t'+b) f(\frac{t'}{a})\frac{dt'}{a} &= \frac{1}{|a|} f(\frac{-b}{a}) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|a|}\delta(t+\frac{b}{a}) f(t)dt\end{aligned}$$

Le facteur $sign(a)$ devant la seconde intégrale vient du fait que les bornes $\pm\infty$ sont inversées dans le changement de variable si a est négatif. Par ailleurs $\dfrac{sign(a)}{a} = \dfrac{1}{|a|}$.

2 On utilise les définitions et le résultat de la question précédente 1(a).

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} (2t+3)\delta(t+1)dt = (2t+3)\big|_{t=-1} = 1$

b) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} te^{-t^2}\delta(t+1)dt = 0$ car -1 n'est pas dans l'intervalle d'intégration.

c) $\displaystyle\int_{-1}^{2} (t^3+3t^2)\delta'(t-1)dt = -\,(t^3+3t^2)'\big|_{t=1} = -9$

d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} t\cos(t)\,\delta^{(n)}(t)dt = (-1)^n \frac{d^n}{dt^n}\left[t\cos(t)\right]\Big|_{t=0} = n\,(-1)^{[n/2]+1}$ si n est impair, 0 sinon.

3 Calcul de $t^n\delta^{(k)}(t)$:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} t^n\delta^{(k)}(t)f(t)dt &= (-1)^k \frac{d^k}{dt^k}\left[t^n f(t)\right]\Big|_{t=0} = (-1)^k \sum_{j=0}^{k} C_k^j \frac{d^j}{dt^j}\left[t^n\right]\frac{d^{k-j}}{dt^{k-j}}\left[f(t)\right]\Big|_{t=0} \\ &= (-1)^k \sum_{j=0}^{k} C_k^j \frac{n!}{(n-j)!} t^{n-j}\,\left[f(t)\right]^{(k-j)}\Big|_{t=0}\end{aligned}$$

Seul le terme constant ($j = n$) contribue dans la somme prise en $t = 0$. Comme $j \leqslant k$, si $n > k$ il n'y aura pas de terme en t^0 et donc la somme est nulle. Si $n \leqslant k$ alors

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^n\delta^{(k)}(t)f(t)dt = (-1)^k C_k^n\, n!\,\left[f(t)\right]_{t=0}^{(k-n)} = (-1)^n C_k^n\, n! \int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(k-n)}(t)f(t)dt$$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

On a donc

$$\begin{aligned} t^n \delta^{(k)}(t) &= (-1)^n C_k^n \, n! \, \delta^{(k-n)} \text{ si } n \leqslant k \\ &= 0 \text{ si } n > k \end{aligned}$$

On en déduit que

$$T = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \delta^{(k)}(t)$$

(où les α_k sont des constantes arbitraires) est solution de l'équation $t^n T = 0$ et

$$T = (-1)^n \delta^{(n)}(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \delta^{(k)}(t)$$

(où les α_k sont des constantes arbitraires) est solution de l'équation $t^n T = \delta$.

4 Potentiel coulombien à une dimension.

a) Calculons la dérivée au sens des distributions de la fonction valeur absolue : $f : x \mapsto |x|$; $f'(x) = sign(x)$; $f''(x) = 2\delta$ puisqu'il y a une discontinuité de saut 2 en $t = 0$.

b) On déduit de la question précédente que la solution de l'équation de Poisson $\dfrac{d^2V}{dx^2} = -\dfrac{q}{\epsilon_0}\delta(x)$ est :

$$V(x) = -\frac{q}{2\epsilon_0}|x| + Ax + B$$

Pour avoir une solution symétrique $x \leftrightarrow -x$ (fonction paire) il faut $A = 0$. De plus on prend $B = 0$ ce qui revient à fixer l'origine des potentiels.

c) Cette particule est soumise, de la part de celle qui est placée à l'origine, à une force $F = qV' = -\dfrac{q^2}{2\epsilon_0}\text{sign}(x)$. L'équation du mouvement est donc

$$m\ddot{x} = -\frac{q^2}{2\epsilon_0}\text{sign}(x)$$

Supposons qu'à l'instant $t = 0$ on ait $x_0 > 0$ et $v_0 > 0$ alors $x(t) = -\dfrac{q^2}{2m\epsilon_0}t^2 + v_0 t + x_0$. Quel que soit v_0 il y aura toujours un instant où $x(t)$ reviendra vers zéro. La force changera alors de signe et la particule sera toujours attirée vers le centre et ne pourra jamais s'échapper à l'infini. Ce phénomène de « confinement » est spécifique de l'espace à une dimension et est dû au fait que la force est constante.

Ce qu'il faut retenir de cet exercice

Ces exercices permettent de se familiariser avec les règles de calcul mettant en jeu l'impulsion de Dirac. La théorie rigoureuse sous-jacente à ces règles sera développée au chapitre 5.

1.5 **1** On détermine les coefficients de la série de Fourier de f d'après les définitions et à l'issue d'un calcul simple d'intégrales on obtient :

$$a_0 = -\frac{\pi}{2\omega}(a-b) \quad ; \quad a_n = \frac{(a-b)}{\pi\omega}\,\frac{[1-(-1)^n]}{n^2} \quad ; \quad b_n = -\frac{(a+b)}{\omega}\,\frac{(-1)^n}{n}$$

$$f(t) = -\frac{\pi}{4\omega}(a-b) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a-b)}{\pi\omega}\,\frac{[1-(-1)^n]}{n^2}\cos n\omega t - \frac{(a+b)}{\omega}\,\frac{(-1)^n}{n}\sin n\omega t$$

Si $|a| \neq |b|$ la fonction est discontinue et n'a pas de propriété de parité : (a_n et/ou b_n) $\sim \dfrac{1}{n}$.

Si $a = b$ la fonction est impaire et discontinue : $a_n \equiv 0$ et $b_n \sim \dfrac{1}{n}$. Si $a = -b$ la fonction est paire et continue : $b_n \equiv 0$ et $a_n \sim \dfrac{1}{n^2}$.

2 Les coefficients de la série de Fourier de g sont

$$a'_0 = (a+b) \quad ; \quad a'_n = 0 \quad ; \quad b'_n = -\frac{(a-b)}{\pi}\,\frac{[1-(-1)^n]}{n}$$

$$g(t) = \frac{1}{2}(a+b) - \frac{(a-b)}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[1-(-1)^n]}{n}\sin n\omega t$$

3 On a $g(t) = f'(t)$. Si f continue, alors $a'_n = n\omega b_n$ et $b'_n = -n\omega a_n$ par dérivation de la série terme à terme. Cette dernière relation pour b'_n est ici bien vérifiée ; cela ne marche pas pour a'_n car f est discontinue (si $a \neq -b$). En revanche

$$\begin{aligned} a'_n &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f'(t)\cos(n\omega t)\,dt = \frac{2}{T}\left\{ f(t)\cos(n\omega t)\Big|_{-T/2}^{T/2} + n\omega\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin(n\omega t)\,dt \right\} \\ &= \frac{2}{T}\left[f\left((T/2)^-\right) - f\left((-T/2)^+\right)\right]\cos\left(n\omega T/2\right) + n\omega b_n = n\omega b_n + (a+b)(-1)^n = 0 \end{aligned}$$

on vérifie $a'_n = n\omega b_n - \dfrac{2}{T}\sigma_0\cos(n\omega t_0)$ où σ_0 est le saut à la discontinuité en $t_0 = k\dfrac{T}{2}$.

Ce qu'il faut retenir de cet exercice

Vérifier que le comportement asymptotique des coefficients est compatible avec les propriétés de continuité de la fonction et de ses dérivées. C'est un bon test des calculs ; dans la question **2** on a un exemple de série qui n'est pas dérivable terme à terme ; cela est à mettre en regard avec la non-convergence uniforme sur une période.

1.6 On utilise

$$\int e^{-at}\sin(bt)dt = \frac{e^{-at}}{a^2+b^2}\left[-a\sin(bt) - b\cos(bt)\right]$$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

et

$$\int e^{-at}\cos(bt)dt = \frac{e^{-at}}{a^2+b^2}\left[b\sin(bt) - a\cos(bt)\right]$$

pour calculer les coefficients de Fourier. On obtient

$$S(f;t) = \frac{1}{\pi a}\left(1-e^{-a\pi}\right) + \frac{2a}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[1-(-1)^n e^{-a\pi}\right]\frac{1}{n^2+a^2}\cos nt$$

La fonction f est continue donc $S(f) \equiv f \quad \forall t$. En particulier

$$\begin{aligned} f(0) &= 1 = \frac{1}{\pi a}\left(1-e^{-a\pi}\right) + \frac{2a}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[1-(-1)^n e^{-a\pi}\right]\frac{1}{n^2+a^2} \\ f(\pi) &= e^{-a\pi} = \frac{1}{\pi a}\left(1-e^{-a\pi}\right) + \frac{2a}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[1-(-1)^n e^{-a\pi}\right]\frac{(-1)^n}{n^2+a^2} \end{aligned}$$

Posons $T_1 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+a^2}$ et $T_2 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+a^2}$

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{\pi a}\left(1-e^{-a\pi}\right) + \frac{2a}{\pi}\left[T_2 - e^{-a\pi}T_1\right] \\ e^{-a\pi} &= \frac{1}{\pi a}\left(1-e^{-a\pi}\right) + \frac{2a}{\pi}\left[T_1 - e^{-a\pi}T_2\right] \end{aligned}$$

On en déduit

$$T_1 = \frac{\pi}{2a\sinh(\pi a)} - \frac{1}{2a^2} \qquad T_2 = \frac{\pi}{2a\tanh(\pi a)} - \frac{1}{2a^2}$$

D'après les notations de l'énoncé $S_1 = \frac{1}{a^2} + T_1$ et $S_2 = \frac{1}{a^2} + T_2$; on a donc

$$S_1 = \frac{\pi}{2a\sinh(\pi a)} + \frac{1}{2a^2} \text{ et } S_2 = \frac{\pi}{2a\tanh(\pi a)} + \frac{1}{2a^2}$$

Ce qu'il faut retenir de cet exercice

La valeur de la somme d'une série de Fourier en un point est donnée par le théorème de Dirichlet. Si la fonction est continue elle coïncide avec sa série de Fourier $\forall t$. Les séries de Fourier fournissent un moyen efficace pour calculer la somme de séries numériques.

1.7 La fonction est impaire donc $a_n = 0$ et

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(\omega_0 t)\sin(nt)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\cos(n-\omega_0)t - \cos(n+\omega_0)t\right]dt \\ &= \frac{2\sin(\omega_0\pi)}{\pi}\frac{n(-1)^n}{\omega_0^2-n^2} \Rightarrow S(f) = \frac{2\sin(\omega_0\pi)}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{\omega_0^2-n^2}\sin(nt) \end{aligned}$$

Si $\omega_0 \to 1$ alors $\sin(\omega_0\pi) \to 0$ et tous les coefficients s'annulent sauf b_1 qui vaut

$$b_1 = \lim_{\omega_0 \to 1} \left[\frac{-2\sin(\omega_0\pi)}{\pi\left(\omega_0^2 - 1\right)} \right] = 1$$

Ce résultat est cohérent puisque la série de Fourier se réduit au seul terme $\sin t$ qui n'est autre que la fonction $f(t)$.

1.8 Le second membre de l'équation correspond à la fonction f de l'exercice 1.5 **1** avec $a = -1$ et $b = 1$. On en déduit :

$$f(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos\left[(2k+1)\,t\right]}{(2k+1)^2}$$

Comme le second membre est une fonction paire et 2π périodique et que l'équation préserve la parité (dérivées d'ordre 0 et 2), on cherche une solution sous la forme d'une fonction paire et 2π périodique : $y = a_0/2 + \sum_n a_n \cos(nt)$. En injectant dans l'équation différentielle

$$\begin{aligned} y'' - 4y &= -4\left(a_0/2\right) + \sum_n \left(-n^2 - 4\right) a_n \cos(nt) \\ &\equiv \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos\left[(2k+1)\,t\right]}{(2k+1)^2} \end{aligned}$$

Par identification on obtient

$$\begin{aligned} a_0 &= -\frac{\pi}{4} \quad a_{2k} = 0 \quad a_{2k+1} = \frac{4}{\pi} \frac{1}{(2k+1)^2\left[(2k+1)^2 + 4\right]} \\ y(t) &= -\frac{\pi}{8} + \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos\left[(2k+1)\,t\right]}{(2k+1)^2\left[(2k+1)^2 + 4\right]} \end{aligned}$$

Remarquons que la série obtenue est bien deux fois dérivable puisque les coefficients de la série dérivée deux fois terme à terme se comportent encore en $\dfrac{1}{(2k+1)^2}$ qui est le terme général d'une série absolument convergente.

Ce qu'il faut retenir de cet exercice

La solution de l'équation est obtenue sous la forme d'une série rapidement convergente ($a_n \sim \dfrac{1}{n^4}$) donc facilement calculable numériquement.

1.9 Pour avoir une série de sinus on construit un motif entre $-L$ et L qui coïncide avec la fonction f sur $(0, L)$ et avec $-f$ sur $(-L, 0)$; on prolonge cette fonction impaire par périodicité

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

de période $2L$. La série de Fourier de la fonction g ainsi obtenue ne comprendra donc que des termes en $\sin(n\pi\frac{x}{L})$. Le coefficient de Fourier est donné par

$$b_n = \frac{2}{(2L)}\int_{-L}^{L} g(x)\sin\left(n\pi\frac{x}{L}\right)\,dx = \frac{2}{L}\int_0^L g(x)\sin\left(n\pi\frac{x}{L}\right)\,dx = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(n\pi\frac{x}{L}\right)\,dx$$

Pour avoir une série de cosinus il faut construire un motif pair.

- Série de Fourier cosinus de $\sin t$ sur $[0,\pi]$:

$$\sin t = a_0/2 + \sum_{n\geqslant 1} a_n\cos 2nt \quad \text{avec } a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin t\cos 2nt\,dt = -\frac{4}{\pi}\frac{1}{4n^2-1}$$

- Série de Fourier sinus de $\cosh t$ sur $]0,1[$:

$$\cosh t = \sum_{n\geqslant 1} b_n\sin n\pi t \quad \text{avec } b_n = 2\int_0^1\cosh t\sin n\pi t\,dt = 2\pi\left[1-(-1)^n\cosh(1)\right]\frac{n}{n^2\pi^2+1}$$

- Série de Fourier cosinus de $\cosh t$ sur $]0,1[$:

$$\cosh t = a_0/2 + \sum_{n\geqslant 1} a_n\cos n\pi t \quad \text{avec } a_n = 2\int_0^1\cosh t\cos n\pi t\,dt = 2\sinh(1)\frac{(-1)^n}{n^2\pi^2+1}$$

Ce qu'il faut retenir de cet exercice

Une fonction peut être représentée sur un intervalle soit par une série de Fourier complète, soit par une série de sinus, soit par une série de cosinus.

1.10 **1** On utilise la relation fonctionnelle : $\Gamma(\frac{5}{2}) = \frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}$,

Définition de la fonction B : $B(2,-\frac{1}{2}) = \dfrac{\Gamma(2)\Gamma\left(-1/2\right)}{\Gamma\left(3/2\right)} = \dfrac{\Gamma(2)\Gamma\left(1/2\right)/\left(-1/2\right)}{1/2\Gamma\left(1/2\right)} = -4$,

De nouveau on utilise la relation fonctionnelle :

$$\begin{aligned}\Gamma(n+\frac{1}{2}) &= \left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots(3)}{2^n}\sqrt{\pi}\\ &= \frac{2n!}{2^n(2n)(2n-2)\cdots(2)}\sqrt{\pi} = \frac{2n!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi} \quad (n\in\mathbb{N}^*)\end{aligned}$$

Pour calculer $\Gamma(-n+\frac{1}{2})$ on utilise la formule des compléments :

$$\Gamma(n+\frac{1}{2})\Gamma(-n+\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{\sin\left[\pi(n+\frac{1}{2})\right]} = (-1)^n\pi \Rightarrow \Gamma(-n+\frac{1}{2}) = (-1)^n\frac{2^{2n}n!}{(2n)!}\sqrt{\pi} \quad (n\in\mathbb{N}^*)$$

2 On effectue un changement de variable dans J_n :

$$\begin{aligned} J_n &= \int_0^\infty t^n e^{-at^2} \ln t \, dt \underset{u=at^2}{=} \frac{1}{2\sqrt{a}} \int_0^\infty \left(\frac{u}{a}\right)^{n/2} e^{-u} (\ln u - \ln a) \frac{du}{\sqrt{u}} \\ &= \frac{1}{2a^{\frac{n+1}{2}}} \left[\Gamma'\left(\frac{n+1}{2}\right) - \ln a \, \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\right] \\ J_0 &= -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}} [\gamma + \ln(4a)] \qquad J_1 = -\frac{1}{2a}[\gamma + \ln(a)] \end{aligned}$$

1.11 **1** On fait le changement de variable $u = \beta t$. On obtient

$$I_1 = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\beta^{\alpha+1}}$$

2 On fait le changement de variable $u = \sqrt{t+b^2}$. On obtient

$$I_2 = \int_b^\infty e^{-a(u^2-b^2)} 2du \underset{v=u\sqrt{a}}{=} e^{ab^2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \operatorname{Erfc}\left(b\sqrt{a}\right)$$

3 On identifie I_3 à la première représentation intégrale de la fonction B :

$$I_3 = B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = \pi$$

4 On utilise l'identité : $at^2 + 2bt + c = a(t + \frac{b}{a})^2 + c - \frac{b^2}{a}$

$$\begin{aligned} I_4(x) &= e^{-c+b^2/a} \int_x^\infty e^{-a(t+\frac{b}{a})^2} dt \underset{u=(t+\frac{b}{a})\sqrt{a}}{=} e^{-c+b^2/a} \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{\left(x\sqrt{a}+\frac{b}{\sqrt{a}}\right)}^\infty e^{-u^2} du \\ &= \frac{1}{2} e^{-c+b^2/a} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \operatorname{Erfc}\left(\frac{b}{\sqrt{a}} + x\sqrt{a}\right) \end{aligned}$$

5 On identifie I_3 à la deuxième représentation intégrale de la fonction B :

$$I_5 = \int_0^{\pi/2} (\sin\theta)^\alpha (\cos\theta)^{-\alpha} d\theta = \frac{1}{2} B(\frac{1+\alpha}{2}, \frac{1-\alpha}{2}) = \frac{\pi/2}{\cos(\pi\alpha/2)}$$

6 Le cosinus intégral se comporte comme $\ln x$ pour $x \sim 0$ et il décroît exponentiellement à l'infini. L'intégrale existe donc. On intègre par parties : $u = \mathrm{Ci}(t) \to u' = \frac{\cos(t)}{t}$; $v' = \cos(pt) \to v = \frac{1}{p}\sin(pt)$

$$I_6 = \frac{1}{p}\sin(pt)\,\mathrm{Ci}(t)\Big|_0^\infty - \frac{1}{p}\int_0^\infty \sin(pt)\frac{\cos(t)}{t} dt = -\frac{1}{2p}\int_0^\infty \frac{\sin[(p+1)t] + \sin[(p-1)t]}{t} dt$$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

On rappelle $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \int_0^\infty \frac{\sin(\alpha t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}\,\text{sign}(\alpha)$. Donc

$$\begin{aligned} I_6 = -\frac{\pi}{4p}\left[\text{sign}(p+1) + \text{sign}(p-1)\right] &= +\frac{\pi}{2p} \text{ pour } p < -1 \\ &= 0 \text{ pour } |p| < 1 \\ &= -\frac{\pi}{2p} \text{ pour } p > 1 \\ &= -\frac{\pi}{4} \text{ pour } p = \pm 1 \end{aligned}$$

Cette fonction de p est représentée sur la figure 1.1.

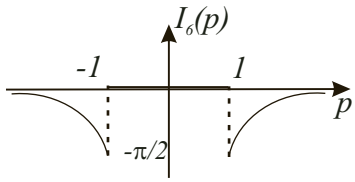

Figure 1.1 Intégrale I6

7 On fait le changement de variable $u = a\,(t+b)$; il vient

$$I_7 = \int_{ab}^{\infty} \frac{e^{-u+ab}}{u} du = e^{ab} E_1(ab)$$

8 On fait le changement de variable $u = a\,(t+b)$; il vient

$$I_8 = e^{ab} \int_{a(\alpha+b)}^{a(\beta+b)} \frac{e^{-u}}{u} du$$

Pour relier cette intégrale à une exponentielle intégrale il faut discuter du signe des bornes, sachant que la condition $-b \notin [a, b]$ implique qu'elles sont toutes les deux de même signe (sinon $u = 0$ serait dans l'intervalle et l'intégrale serait divergente).
Si $0 < a\,(\alpha+b) < a\,(\beta+b) \Leftrightarrow -b < \alpha < \beta$ alors

$$\begin{aligned} I_8 &= e^{ab} \int_{a(\alpha+b)}^{a(\beta+b)} \frac{e^{-u}}{u} du = e^{ab} \left\{ \int_{a(\alpha+b)}^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} du - \int_{a(\beta+b)}^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} du \right\} \\ &= e^{ab} \left\{ E_1\left[a(\alpha+b)\right] - E_1\left[a(\beta+b)\right] \right\} \end{aligned}$$

Si $a\,(\alpha+b) < a\,(\beta+b) < 0 \Leftrightarrow \alpha < \beta < -b$ on ne peut plus utiliser la relation de Chasles avec $+\infty$ car $u = 0$ serait dans l'intervalle ; on commence par faire un changement de variable pour se ramener à des bornes positives :

$$I_8 = e^{ab} \int_{a(\alpha+b)}^{a(\beta+b)} \frac{e^{-u}}{u} du \underset{u \to -u}{=} e^{ab} \int_{-a(\alpha+b)}^{-a(\beta+b)} \frac{e^{u}}{u} du$$

Maintenant, à cause du e^u, on utilise la relation de Chasles avec $-\infty$ pour assurer la convergence à l'infini. Ce faisant on introduit une divergence en $u = 0$; mais comme l'intégrale de départ est convergente on peut aussi la prendre en partie principale et on se ramène alors à la fonction E_i :

$$\begin{aligned} I_8 &= e^{ab}\left\{PP\int_{-\infty}^{-a(\alpha+b)}\frac{e^u}{u}du - PP\int_{-\infty}^{-a(\beta+b)}\frac{e^u}{u}du\right\} \\ &= e^{ab}\left\{E_i\left[a\,|\alpha+b|\right] - E_i\left[a\,|\beta+b|\right]\right\} \end{aligned}$$

9 On fait le changement de variable $u = \ln t$; il vient

$$\begin{aligned} I_9 &= \int_0^\infty \sqrt{u}e^{-2u}\frac{du}{u} \underset{v=2u}{=} \int_0^\infty \frac{\sqrt{u}}{e^{2u}}e^u du \\ &= \int_0^\infty \sqrt{u}e^{-u}du = \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \end{aligned}$$

10 On fait le changement de variable $u = a(t+b)$; il vient

$$\begin{aligned} I_{10} &= \int_{ab}^\infty \frac{\sin(u-ab)}{u}du = \int_{ab}^\infty \frac{\sin u\cos ab - \sin ab\cos u}{u}du \\ &= \cos(ab)\left(\frac{\pi}{2} - \mathrm{Si}(ab)\right) + \sin(ab)\,\mathrm{Ci}(ab) \end{aligned}$$

11 On fait le changement de variable $u = t^{2n}$; il vient

$$I_{11} = \int_{ab}^\infty \frac{u^{\frac{1}{2n}-1}}{1+u}du$$

On reconnaît la troisième représentation intégrale de la fonction B :

$$I_{11} = \frac{1}{2n}B(\frac{1}{2n}, 1-\frac{1}{2n}) = \frac{1}{2n}\frac{\pi}{\sin(\pi/2n)} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

12 On fait le changement de variable $u = t^2/9$; il vient

$$\begin{aligned} I_{12} &= \int_0^1 9^{3/2}(1-u)^{3/2}\frac{3}{2\sqrt{u}}du = \frac{81}{2}\int_0^1 (1-u)^{3/2}u^{-1/2}du \\ &= \frac{81}{2}B(\frac{5}{2},\frac{1}{2}) = \frac{243}{16}\pi \end{aligned}$$

Ce qu'il faut retenir de cet exercice

Cet exercice met en évidence la diversité d'utilisation de ces fonctions définies par des intégrales qui doivent désormais faire partie de la panoplie des fonctions usuelles au même titre que le sinus, l'exponentielle ou le logarithme.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

1.12 **1** **a)** On a

$$f^{*2}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Pi_2(t-t')\Pi_2(t')dt' = \int_{-1}^{1} \Pi_2(t-t')dt'$$

avec

$$\begin{aligned} \Pi_2(t-t') &= 1 \text{ pour } t-1 < t' < t+1 \\ &= 0 \text{ sinon} \end{aligned}$$

Donc

Intervalle en t		Valeur de $f^{*2}(t)$
$t+1 < -1 \cup t-1 > 1$	$\Leftrightarrow \lvert t\rvert > 2$	0
$-1 < t+1 < 1$	$\Leftrightarrow -2 < t < 0$	$\int_{-1}^{t+1} dt' = t+2$
$-1 < t-1 < 1$	$0 < t < 2$	$\int_{t-1}^{1} dt' = 2-t$

Finalement

$$f^{*2}(t) = (2-|t|)u(2-|t|) = 2\Lambda_2(t)$$

On peut utiliser une méthode graphique : $\Pi_2(t')$ est un créneau fixe centré en $t' = 0$ et $\Pi_2(t-t')$ un créneau « mobile » centré en $t' = t$. L'intégrale de convolution représente l'aire du recouvrement des deux créneaux que l'on évalue en faisant varier t.

b) Le calcul de l'intégrale ou la méthode graphique conduisent au résultat :

$$\begin{aligned} f^{*3}(t) = \Pi_2(t) * 2\Lambda_2(t) &= 0 && t < -3 \\ &= \frac{1}{2}(t+3)^2 && -3 < t < -1 \\ &= 3 - t^2 && -1 < t < 1 \\ &= \frac{1}{2}(t-3)^2 && 1 < t < 3 \\ &= 0 && t > 3 \end{aligned}$$

c) Explicitons l'intégrale de convolution :

$$\begin{aligned} f(t) * g(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t-t')g(t')dt' = \int_{-a}^{a} \sin(t-t')(a-|t'|)dt' \\ &= \int_{-a}^{0} \sin(t-t')(a+t')dt' + \int_{0}^{a} \sin(t-t')(a-t')dt' \\ &= 2(1-\cos a)\sin t \end{aligned}$$

où le résultat s'obtient en intégrant par parties.

d) Ces fonctions sont causales ; leur produit de convolution s'écrit donc

$$\begin{aligned} f_a(t) * f_b(t) &= \frac{u(t)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \int_0^t (t-t')^{a-1} e^{-(t-t')} t'^{b-1} e^{-t'} dt' \\ &= \frac{u(t)e^{-t}}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \int_0^t (t-t')^{a-1} t'^{b-1} dt' \underset{v=t'/t}{=} \frac{u(t)e^{-t}t^{a+b-1}}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \int_0^1 (1-v)^{a-1} v^{b-1} dv \end{aligned}$$

L'intégrale qui apparaît dans l'expression ci-dessus n'est autre qu'une fonction $B(a,b) = \dfrac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$. En remplaçant on obtient :

$$f_a(t) * f_b(t) = \frac{1}{\Gamma(a+b)} t^{a+b-1} e^{-t} u(t) = f_{a+b}(t)$$

2 En utilisant la propriété de $\delta^{(n)}$ on a :

$$f(t) * \delta^{(n)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-t')\delta^{(n)}(t')dt = (-1)^n \left.\frac{d^n}{dt'^n} f(t-t')\right|_{t'=0} = f^{(n)}(t)$$

3 Produit de convolution de gaussiennes.

a) On utilise l'identité : $-\alpha t^2 + \beta t = -\alpha(t+\beta/2\alpha)^2 + \beta^2/4\alpha$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha t^2 + \beta t} dt &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha(t+\beta/2\alpha)^2} e^{\beta^2/4\alpha} dt \underset{u=\sqrt{\alpha}(t+\beta/2\alpha)}{=} e^{\beta^2/4\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} \frac{du}{\sqrt{\alpha}} \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \exp\left(\frac{\beta^2}{4\alpha}\right) \end{aligned}$$

b) Utilisons ce résultat pour évaluer l'intégrale de convolution de deux gaussiennes :

$$\begin{aligned} f_a(t) * f_b(t) &= \frac{1}{2\pi ab} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t-t')^2/2a^2} e^{-t'^2/2b^2} dt' \\ &= \frac{1}{2\pi ab} e^{-t^2/2a^2} \int_0^t \exp\left[-t'^2\left(\frac{1}{2a^2} + \frac{1}{2b^2}\right)\right] \exp\left(\frac{2tt'}{2a^2}\right) dt' \end{aligned}$$

Cette intégrale est de la forme de celle de la question **3** **a)** avec $\alpha = \left(\dfrac{1}{2a^2} + \dfrac{1}{2b^2}\right) = \dfrac{a^2+b^2}{2a^2b^2}$ et $\beta = t/a^2$. On a donc

$$\begin{aligned} f_a(t) * f_b(t) &= \frac{1}{2\pi ab} e^{-t^2/2a^2} \sqrt{\frac{2\pi a^2 b^2}{a^2+b^2}} \exp \frac{t^2}{4a^4 \frac{a^2+b^2}{2a^2b^2}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2\pi\left(a^2+b^2\right)}} \exp\left(-\frac{t^2}{2a^2} + \frac{b^2t^2}{2a^2\left(a^2+b^2\right)}\right) \\ &= \sqrt{\frac{1}{2\pi\left(a^2+b^2\right)}} \exp\left[-\frac{t^2}{2\left(a^2+b^2\right)}\right] = f_{\sigma(a,b)}(t) \end{aligned}$$

où $\sigma(a,b) = \sqrt{\left(a^2+b^2\right)}$.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

c) On a donc $f_a^{*2}(t) = f_{a\sqrt{2}}$; à l'aide du résultat de la question précédente on calcule

$$f_a^{*3} = f_a^{*2} * f_a = f_{a\sqrt{2}} * f_a = f_{\sqrt{(2a^2+a^2)}} = f_{a\sqrt{3}}$$

On vérifie que $f_a^{*n}(t) = f_{a\sqrt{n}}(t) = \dfrac{1}{a\sqrt{2\pi n}} \exp(-\dfrac{t^2}{2na^2})$.

Ce qu'il faut retenir de cet exercice

Les intégrales de convolution sont souvent difficiles à calculer ; on verra aux chapitres 2 et 3 des méthodes plus efficaces que le calcul direct. Si les fonctions impliquées ont des formes simples – créneaux, triangles – la méthode graphique est efficace.

Corrigésdesproblèmes

Problème 1.1

On cherche une solution de la forme $u(x,t) = \sum_{n\geqslant 1} b_n(t) \sin(n\pi \frac{x}{l})$; en effet, cette série en sinus satisfait automatiquement la condition aux bords. En supposant la série dérivable deux fois on obtient

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geqslant 1} \left\{ b_n'(t) + \left[\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \alpha + \beta \right] b_n(t) \right\} \sin(n\pi \frac{x}{l}) &= 0 \\
b_n'(t) + \left[\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \alpha + \beta \right] b_n(t) &= 0 \Rightarrow b_n(t) = B_n\, e^{-\beta t}\, e^{-\alpha(\frac{n\pi}{l})^2 t} \\
u(x,t) &= e^{-\beta t} \sum_{n\geqslant 1} B_n\, e^{-\alpha(\frac{n\pi}{l})^2 t} \sin(n\pi \frac{x}{l})
\end{aligned}$$

Pour déterminer la suite de constantes arbitraires $\{B_n\}$ on utilise la condition initiale qui devient

$$u(x,0) = \sum_{n\geqslant 1} B_n \sin(n\pi \frac{x}{l}) \equiv x(l-x) \quad x \in [0,l]$$

Les B_n apparaissent donc comme étant les coefficients de Fourier sinus sur $[0,l]$ de la fonction $x(l-x)$. Donc

$$B_n = \frac{2}{l} \int_0^l x(l-x) \sin\left(n\pi \frac{x}{l}\right) dx = \frac{4l^2}{\pi^3} \frac{1-(-1)^n}{n^3}$$

Finalement

$$u(x,t) = \frac{4l^2}{\pi^3} e^{-\beta t} \sum_{n\geqslant 1} \frac{1-(-1)^n}{n^3}\, e^{-\alpha(\frac{n\pi}{l})^2 t} \sin(n\pi \frac{x}{l})$$

On vérifie que la série est dérivable deux fois par rapport à x.

Ce qu'il faut retenir de ce problème

La périodicité de la condition aux bords $u(0,t) = u(l,t) = 0$ suggère de chercher la solution sous la forme d'une série de Fourier. La valeur zéro de la fonction en $x = 0$ et $x = l$ conduit à une série de sinus qui va automatiquement implémenter la condition.

Problème 1.2

On note f_n la fonction de période 1 qui coïncide avec B_n sur $]0,1[$ et $S_n = S_F(f_n)$ la série de Fourier de cette fonction. On notera $\{a_k(n)\}$ et $\{b_k(n)\}$ les suites de coefficients de Fourier de cette série.

1 On remarque que la fonction f_1 est impaire, donc

$$\begin{aligned} a_k(1) &\equiv 0 \\ b_k(1) &= 2\int_0^1 (x - \frac{1}{2})\sin(2\pi kx)dx = -\frac{1}{\pi k} \end{aligned}$$

La série s'exprime donc

$$S_1 = -\frac{1}{\pi}\sum_{k\geqslant 1}\frac{\sin(2\pi kx)}{k}$$

2 Calculons le coefficient de Fourier $a_0(n)$ de f_n :

$$\text{pour } n \geqslant 1 \quad a_0(n) = 2\int_0^1 B_n(x)dx = 2\int_0^1 B'_{n+1}(x)dx = 2\left[B_{n+1}(1) - B_{n+1}(0)\right] = 0$$

3 Calculons les autres coefficients de Fourier de f_n :

$$\begin{aligned} \text{pour } n \geqslant 2:\ a_k(n-1) &= 2\int_0^1 B_{n-1}(x)\cos(2k\pi x)dx = 2\int_0^1 B'_n(x)\cos(2k\pi x)dx \\ &= 2\ B_n(x)\cos(2k\pi x)\big|_0^1 + 2k\pi \times 2\int_0^1 B_n(x)\sin(2k\pi x)dx \\ &= 2k\pi b_k(n) \\ &\Rightarrow\ b_k(n) = \frac{1}{2\pi k}a_k(n-1) \end{aligned}$$

On montre de même que

$$a_k(n) = -\frac{1}{2\pi k}b_k(n-1) \quad n \geqslant 2$$

On en déduit que pour tout $k \geqslant 1$

$$\Rightarrow a_k(n) = -\left(\frac{1}{2\pi k}\right)^2 a_k(n-2) \quad b_k(n) = -\left(\frac{1}{2\pi k}\right)^2 b_k(n-2) \quad n \geqslant 3$$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

On a des relations de récurrence par pas de deux entre les séries de coefficients. Ces relations sont initialisées par

$$a_k(1) = 0 \qquad b_k(1) = -\frac{1}{\pi k}$$
$$a_k(2) = -\frac{1}{2\pi k} b_k(1) = \frac{1}{2\pi^2 k^2} \qquad b_k(2) = \frac{1}{2\pi k} a_k(1) = 0$$

Donc pour tout n impair la série des $a_k(n)$ est nulle ; de même pour tout n pair la série des $b_k(n)$ est nulle. Les autres coefficients s'obtiennent en résolvant les relations de récurrence, ce qui donne

$$a_k(2p) = \frac{2(-1)^{p+1}}{(2\pi)^{2p}} \frac{1}{k^{2p}} \quad b_k(2p+1) = \frac{2(-1)^{p+1}}{(2\pi)^{2p+1}} \frac{1}{k^{2p+1}}$$

Finalement

$$S_{2p}(x) = \frac{2(-1)^{p+1}}{(2\pi)^{2p}} \sum_{k \geqslant 1} \frac{\cos(2\pi k x)}{k^{2p}} \quad \text{et} \quad S_{2p+1}(x) = \frac{2(-1)^{p+1}}{(2\pi)^{2p+1}} \sum_{k \geqslant 1} \frac{\sin(2\pi k x)}{k^{2p+1}}$$

4 Pour $n \geqslant 2$ les fonctions f_n sont continues du fait de la condition $B_n(1) = B_n(0)$. Donc $f_n(x) \equiv S_n(x) \equiv B_n(x) \quad \forall x \in [0, 1]$. En particulier $S_n(0) \equiv B_n(0)$. Pour $n = 2p$ on peut en déduire la valeur des fonctions ζ de Riemann $\zeta(2p)$:

$$\zeta(2p) = \sum_{k \geqslant 1} \frac{1}{k^{2p}} = \frac{1}{2}(-1)^{p+1}(2\pi)^{2p} B_{2p}(0)$$

Grâce aux relations de récurrence entre les polynômes on trouve $B_2(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}$; $B_4(x) = \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{24}x^2 - \frac{1}{720}$. On en déduit $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$, $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$.

Ce qu'il faut retenir de ce problème

Les séries de Fourier fournissent ici un moyen de calculer la valeur de la fonction ζ de Riemann pour des valeurs entières paires de la variable.

Problème 1.3

1 On va établir une représentation intégrale pour la somme partielle de Fourier.

a) Exprimons la combinaison

$$\begin{aligned} a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt) &= \cos(nt) \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t') \cos nt' dt' + \sin(nt) \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t') \sin nt' dt' \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t') \cos(n(t'-t)) dt' \end{aligned}$$

b) On en déduit que

$$\begin{aligned} S_N(t) &= a_0/2 + \sum_{n=0}^{N} a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t')\left\{\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{N} \cos n(t'-t)\right\} dt' \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t')\left\{-\frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{N} \cos n(t'-t)\right\} dt' \end{aligned}$$

On peut calculer explicitement la somme de cosinus en remarquant :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N} \cos nu &= \mathrm{Re}\sum_{n=0}^{N} e^{inu} = \mathrm{Re}\,\frac{e^{i(N+1)u}-1}{e^{iu}-1} = \frac{\mathrm{Re}\left\{\left[e^{i(N+1)u}-1\right]\left[e^{-iu}-1\right]\right\}}{4\sin^2(\frac{u}{2})} \\ &= \frac{\cos(Nu) - \cos\left[(N+1)u\right] - \cos(u) + 1}{4\sin^2(\frac{u}{2})} \\ &= \frac{2\sin(\frac{u}{2})\sin\left[(N+\frac{1}{2})u\right] + 2\sin^2(\frac{u}{2})}{4\sin^2(\frac{u}{2})} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{\sin\left[(N+\frac{1}{2})u\right]}{\sin\left(\frac{u}{2}\right)} \end{aligned}$$

En reportant dans l'équation ci-dessus on en déduit l'expression pour la somme partielle $S_N(t)$:

$$S_N(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t')\frac{\sin\left[(N+\frac{1}{2})(t'-t)\right]}{\sin\left[\frac{1}{2}(t'-t)\right]}dt'$$

2 Appliquons cette représentation de la somme partielle à la fonction créneau 2π-périodique impaire.

a) Sa série de fourier n'a que des termes en sinus avec

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left\{-\int_{-\pi}^{0}\sin(nt)dt + \int_{0}^{\pi}\sin(nt)dt\right\} = \frac{2}{\pi}\frac{1-(-1)^n}{n}$$

On a donc $f(t) = \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{k\geqslant 0}\frac{\sin(2k+1)t}{2k+1}$.

b) En utilisant le résultat de la question **1** **b)** on a pour $t \in]-\pi, \pi[$

$$S_N(t) = \frac{1}{2\pi}\left\{-\int_{-\pi}^{0}\frac{\sin\left[(N+\frac{1}{2})(t'-t)\right]}{\sin\left[\frac{1}{2}(t'-t)\right]}dt' + \int_{0}^{\pi}\frac{\sin\left[(N+\frac{1}{2})(t'-t)\right]}{\sin\left[\frac{1}{2}(t'-t)\right]}dt'\right\}$$

On pose $u = t - t'$ dans la première intégrale et $u = t' - t$ dans la seconde :

$$S_N(t) = \frac{1}{2\pi}\left\{-\int_{t}^{\pi+t}\frac{\sin(N+\frac{1}{2})u}{\sin\frac{1}{2}u}du + \int_{-t}^{\pi-t}\frac{\sin(N+\frac{1}{2})u}{\sin\frac{1}{2}u}du\right\}$$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

Pour $t \in [0, \pi]$ les intervalles $[-t, \pi - t]$ et $[t, \pi + t]$ se recouvrent sur $[t, \pi - t]$; sur cet intervalle la différence des deux intégrales s'annule ; il ne reste que

$$S_N(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-t}^{t} \frac{\sin\left[(N + \frac{1}{2})u\right]}{\sin\left(\frac{1}{2}u\right)} du - \frac{1}{2\pi} \int_{\pi-t}^{\pi+t} \frac{\sin\left[(N + \frac{1}{2})u\right]}{\sin\left(\frac{1}{2}u\right)} du$$

c) On regarde le voisinage de $t = 0$; en posant $t = \epsilon$ les deux intégrales sont de la forme :

$$\int_{a-\epsilon}^{a+\epsilon} g(t)dt = 2\epsilon g(a) + o(\epsilon)$$

où $g(t) = \dfrac{\sin\left[(N + \frac{1}{2})t\right]}{\sin\left(\frac{1}{2}t\right)}$. Dans la seconde intégrale $a = \pi$ et $g(\pi) = (-1)^N$; dans la première $a = 0$ et $g(0) = 2N + 1$. Donc dans la limite où $N \to \infty$ la première intégrale est dominante. Si on pose $m = N + \dfrac{1}{2}$, $v = mu$ on obtient

$$S_N(t) \simeq \frac{1}{\pi m} \int_0^{mt} \frac{\sin v}{\sin\left(\frac{v}{2m}\right)} dv$$

d) Pour obtenir le maximum : $S'_N(t) = \dfrac{1}{\pi} \dfrac{\sin mt}{\sin\left(t/2\right)}$ qui s'annule $mt = \pi \to t_M = \pi/m$ pour $t < t_M$, $\sin(t/2)$ reste petit positif ; la dérivée est donc positive pour $t < t_M$. On a bien un maximum de S_N.
On calcule $S_N(t_M = \pi/m)$; pour $m \simeq N \gg 1$ on a $\dfrac{v}{2m} \ll 1$ puisque $v \in (0, \pi)$; donc $\sin\left(\dfrac{v}{2m}\right) \simeq \dfrac{v}{2m}$ d'où

$$S_N^{\max} \simeq \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin \xi}{\xi} d\xi$$

On a $S_N^{\max} \simeq \dfrac{2}{\pi}\mathrm{Si}(\pi) \simeq 1.18$. Le fait remarquable est que cette valeur ne dépend pas de N. Quand N croît, ce premier maximum garde toujours la même valeur tandis que sa position $t_M \simeq \dfrac{\pi}{N}$ se rapproche de zéro.

Ce qu'il faut retenir de ce problème

Le phénomène de Gibbs traduit la convergence non uniforme de la série au voisinage d'une discontinuité.

Problème 1.4

1 En utilisant les propriétés de la fonction Γ on a

$$\int_0^1 \ln\Gamma(t)dt \underset{t'=1-t}{=} \int_0^1 \ln\Gamma(1-t')dt' = \frac{1}{2}\left\{\int_0^1 \ln\Gamma(t)dt + \int_0^1 \ln\Gamma(1-t')dt'\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \ln\left[\Gamma(t)\Gamma(1-t)\right]dt = \frac{1}{2}\int_0^1 \ln\left[\frac{\pi}{\sin\pi t}\right]dt = \frac{1}{2}\ln\pi - \frac{1}{2}\int_0^1 \ln(\sin\pi t)\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\ln\pi + \frac{1}{2}\ln 2 = \ln\sqrt{2\pi}$$

2 Soit

$$F(x) = \int_x^{x+1} \ln\Gamma(t)dt \quad x \geqslant 0$$

a) On a pour, $x > 0$

$$F'(x) = \ln\Gamma(x+1) - \ln\Gamma(x) = \ln\frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x)} = \ln x$$

b) On en déduit pour $x > 0$

$$F(x) = x\ln x - x + C$$

On prolonge pour $x \to 0$: $F(0) = \displaystyle\int_0^1 \ln\Gamma(t)dt = \ln\sqrt{2\pi} = C \Rightarrow$

$$F(x) = x\ln x - x + \ln\sqrt{2\pi} \quad \text{pour } x \geqslant 0$$

3 Utilisons la formule des trapèzes pour $F(x)$

$$F(x) = \int_x^{x+1} \ln\Gamma(t)dt = \frac{1}{2}\left[\ln\Gamma(x+1) + \ln\Gamma(x)\right] - \frac{1}{12}\frac{d^2}{dx^2}\ln\Gamma(x)\bigg|_{x=\theta} \quad \text{avec } \theta \in \,]x, x+1[$$

Pour x grand

$$\left|-\frac{1}{12}\frac{d^2}{dx^2}\ln\Gamma(x)\right| \lesssim \frac{1}{12}\frac{1}{x-1}$$

On en déduit pour x grand

$$F(x) = \frac{1}{2}\ln\left[\Gamma(x+1)\Gamma(x)\right] + o(\frac{1}{x}) = x\ln x - x + \ln\sqrt{2\pi}$$

On peut écrire

$$\frac{1}{2}\ln\left[\Gamma(x+1)\Gamma(x)\right] = \frac{1}{2}\ln\left[\Gamma(x+1)\frac{\Gamma(x+1)}{x}\right] = \ln\Gamma(x+1) - \ln\sqrt{x}$$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

En remplaçant dans l'expression ci-dessus

$$\ln \Gamma(x+1) = x \ln x - x + \ln \sqrt{2\pi} + \ln \sqrt{x} + o(\frac{1}{x})$$

on obtient que pour x grand (avec $e^{o(1/x)} = 1 + o(1/x)$)

$$\Gamma(x+1) \simeq \sqrt{2\pi} x^{x+1/2} e^{-x} \left[1 + o(1/x)\right]$$

Ce qu'il faut retenir de ce problème

Cette démonstration de la formule de Stirling utilise largement les propriétés de la fonction Gamma. La formule de Stirling est plus connue comme approximation de la factorielle. En effet si on l'applique pour $x = n \in \mathbb{N}$:

$$\Gamma(n+1) = n! \simeq \sqrt{2\pi}\, n^{n+\frac{1}{2}}\, e^{-n}$$

Pour $n = 5$ on a $5! = 120$ tandis que la formule de Stirling donne 118, soit moins que 2 % d'erreur.